

## Вопросы по теории

22 июля

1. Аффинные преобразования. Определение и свойства. Всякую ли тройку чевиан можно перевести в биссектрисы; высоты? Прямая Ньютона-Гаусса. Аффинные преобразования сохраняют отношение площадей. Четырёхугольник можно перевести аффинным преобразованием во вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями.
2. Теорема Кронекера. Теорема Кронекера-Дирихле. «Докажите, что степень двойки может начинаться на те же 2025 цифр, что и оканчиваться.» Теорема Кронекера для двух кузнечиков.
3. Разностный многочлен. Определение, степень и старший коэффициент. Разложение  $P(x)$  по многочленам  $C_x^k$  и вычисление разностного многочлена в этих терминах. Два критерия целозначности многочлена.
4. Проективная плоскость. Центральное проектирование, исключительные прямые. Связь аффинных и проективных преобразований. Теорема Дезарга, теорема Паппа. Теорема о дважды перспективных треугольниках.
5. Предел последовательности. Определение и свойства. Лемма о двух милиционерах, предельный переход в неравенствах. Арифметические свойства пределов. Лемма Кантора и равносильное определение сходимости. Существование супремума. Предел  $(1 + 1/n)^n$ .
6. Аддитивная комбинаторика. Теорема Коши-Дэвенпорта. Обобщение для  $k$  множеств. «Даны  $n$  натуральных чисел, взаимно простых с  $n$ . Докажите, что для любого  $a$  можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была сравнима с  $a$  по модулю  $n$ .» Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива.
7. Двойное отношение четвёрки точек на проективной прямой. Двойное отношение четвёрки прямых. Гармоническая четвёрка, примеры. Теоремы Чевы и Менелая в направленных. Тригонометрические формы. Изогональное сопряжение, прямая Симсона. Теорема Паскаля, случаи четырёхугольника и треугольника.
8.  $k$ -связный граф и  $k$ -рёберно-связный граф. Количество рёбер в критическом  $k$ -рёберно-связном графе на  $n$  вершинах. «Известно, что граф  $G$  на  $n$  вершинах является двусвязным, но при этом содержит разделяющее множество из 2 смежных вершин. Докажите, что  $G$  содержит двусвязный индуцированный подграф (не равный  $G$ ), в котором больше  $\frac{n}{2}$  вершин.»
9. Непрерывность функции в точке, равносильные определения. Предел при  $x$ , стремящемся к бесконечности. Из ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Три теоремы о непрерывной функции. Функция Римана.
10. Полярное соответствие. Определение и свойства. Примеры полярно двойственных утверждений и теорем. Основное свойство полярного соответствия.

**11.** Асимптотика и непрерывность многочленов. С некоторого момента значения многочлена строго возрастают. «Даны два многочлена  $P(x)$  и  $Q(x)$  с вещественными коэффициентами, причём у обоих старшие коэффициенты положительны. Известно, что при любом вещественном значении  $y$  числа  $P(y)$  и  $Q(y)$  либо одновременно целые, либо одновременно нецелые. Докажите, что  $P(x) - Q(x) = \text{const.}$ » «Существует ли отображение из шара радиуса 1 в круг радиуса 10100, не уменьшающее никакие расстояния?»

**12.** Двойное отношение четвёрки точек на окружности. Определение и свойства. Задача о четвёрке секущих, теорема о бабочке. Гармонический четырёхугольник, равносильные определения.

**13.** Теорема Турана.  $ex(n, K_{2,2}) \leq \frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}$ . Теорема Турана для дистанционных графов на плоскости.